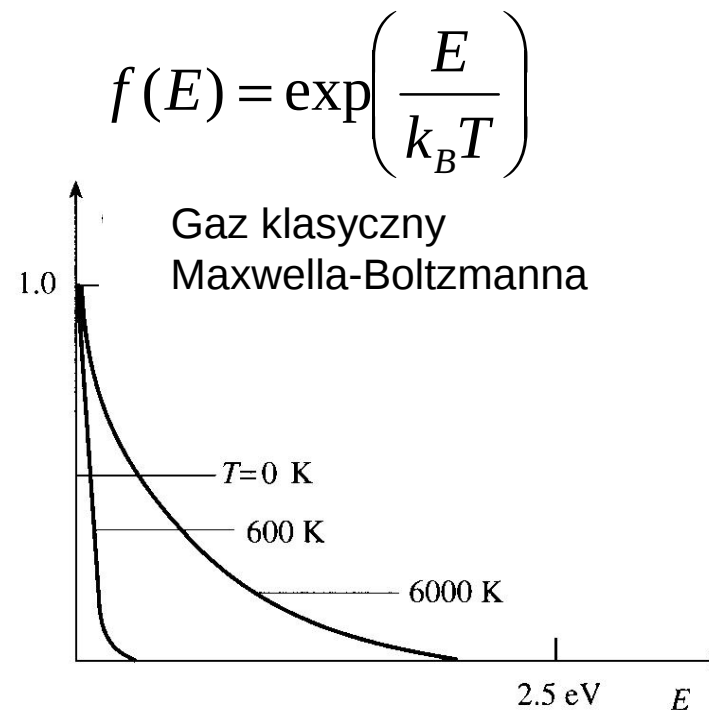
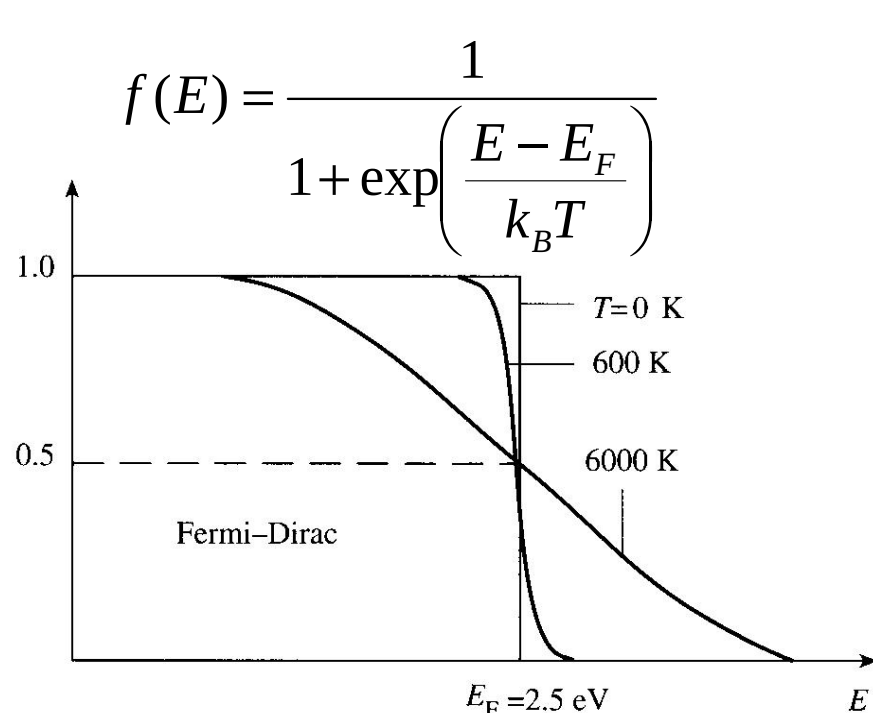


Statystyka Fermiego-Diraca

$f(E)$ - prawdopodobieństwo obsadzenia poziomów o energii E



Gaz kwantowy Fermiego-Diraca

$T = 0 \text{ K}$ $f(E) = 1$ gdy $E \leq E_F$
 $f(E) = 0$ $E > E_F$

$T \neq 0 \text{ K}$ $E_e = 0 \div E_F$

Tylko elektron $E_e \sim E_F$ dostaje kT

Gaz klasyczny MB

$T = 0 \text{ K}$ $E_e = 0$

$T \neq 0 \text{ K}$ każdy elektron dostaje kT

Energia Fermiego dla danego materiału jest energią stanu kwantowego, który jest obsadzony przez elektron z prawdopodobieństwem 0.5.

Wpływ temperatura $T \neq 0K$

$$T = 0K \quad f(E) = 1 \quad E \leq E_F$$

$$T \neq 0K \quad f(E) < 1$$

Gęstość stanów

$$D(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

$$D(E)f(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} f(E)$$

Gęstość stanów na jednostkę objętości

$$g(E) = \frac{1}{V} D(E) = \frac{\sqrt{2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} E^{1/2}$$

$$\frac{1}{V} D(E)f(E) = g(E)f(E)$$

Liczba elektronów o energii zawartej między E i $E+dE$

$$D(E) dE$$

$$D(E)f(E)dE = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} f(E) dE$$

Całkowita liczba elektronów o energiach $E \leq E_F$ ($T=0K$ $f(E) = 1$)

$$N = \int_0^{E_F} D(E) dE = \int_0^{E_F} \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} E_F^{3/2}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}$$

Wpływ temperatura $T \neq 0K$

$$T = 0K \quad f(E) = 1 \quad E \leq E_F$$

$$T \neq 0K \quad f(E) < 1$$

Całkowita energia kinetyczna N elektronów

$$E_{cal} = \int_0^{E_F} D(E)E dE = \frac{3}{5} N E_F$$

$$E_{cal} = \int_0^{E_F} D(E)f(E)E dE$$

Średnia energia

$$\langle E \rangle = \frac{E_{cal}}{N} = \frac{1}{N} \int_0^{E_F} D(E)E dE$$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} D(E)f(E)E dE \\ &= E_0 + \frac{\pi_2}{6} (k_B T)^2 D(E_F) \end{aligned}$$

$$E_0 = E(T=0)$$

energia całkowita w stanie podstawowym

prawdopodobieństwo obsadzenia stanu

Dane

 $E = E_F \pm 0.1 \text{ eV}$ $T = 800 \text{ K}$

Szukane

 $f(E) = ?$

$$\frac{E - E_F}{k_B T} = \frac{0.1 \times 1.6 \cdot 10^{-19} [\text{J}]}{1.38 \cdot 10^{-23} [\text{J/K}] \times 800 [\text{K}]} = \frac{0.1 [\text{eV}]}{\left(\frac{1.38 \cdot 10^{-23}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \right) [\text{eV/K}] \times 800 [\text{K}]} = 1.45$$

prawdopodobieństwo obsadzenia stanu o energii przekraczającej energii Fermiego o 0.1 eV

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)} = \frac{1}{1 + e^{(1.45)}} = \dots$$

prawdopodobieństwo obsadzenia stanu o energii 0.1 eV poniżej energii Fermiego

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)} = \frac{1}{1 + e^{(-1.45)}} = \dots$$

prawdopodobieństwo obsadzenia stanu

Dane
 $E = E_F + 63\text{meV}$
 $f(E) = 0.09$
 Szukane
 $E = E_F - 63\text{meV}$
 $f(E) = ?$

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)}$$

$$E = E_F + 63\text{meV}$$

$$\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) = \frac{1}{f(E)} - 1 = \frac{1}{0.09} - 1 = 10.11$$

$$\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) = \ln(10.11) = 2.313$$

$$E = E_F - 63\text{meV}$$

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_B T}\right)} = \frac{1}{1 + e^{(-2.313)}} = \frac{1}{1 + 0.0989} = 91\%$$

Liczba stanów

Gęstość stanów dla energii E na jednostkę objętości = liczba stanów na m³ na eV = [stany /m³.eV]

$$g(E) = \frac{1}{V} D(E) = \frac{\sqrt{2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} E^{1/2} = \frac{8\sqrt{2} \pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} = c E^{1/2}$$

$$c = \frac{8\sqrt{2} \pi m^{3/2}}{h^3} = \frac{8\sqrt{2} \pi (9.1 \cdot 10^{-31})^{3/2} [kg]^{3/2}}{(6.62 \cdot 10^{-34})^3 [J.s]^3} = 0.106 \cdot 10^{57} \frac{1}{[J^{3/2} \cdot m^3]} \times (1.6 \cdot 10^{-19})^{3/2} = 0.678 \cdot 10^{28} \frac{1}{[eV^{3/2} \cdot m^3]}$$

$E(eV)$	$g(E) (1.10^{28}/eV.m^3)$
---------	---------------------------

1	0.678
---	-------

2	0.959
---	-------

3	1.174
---	-------

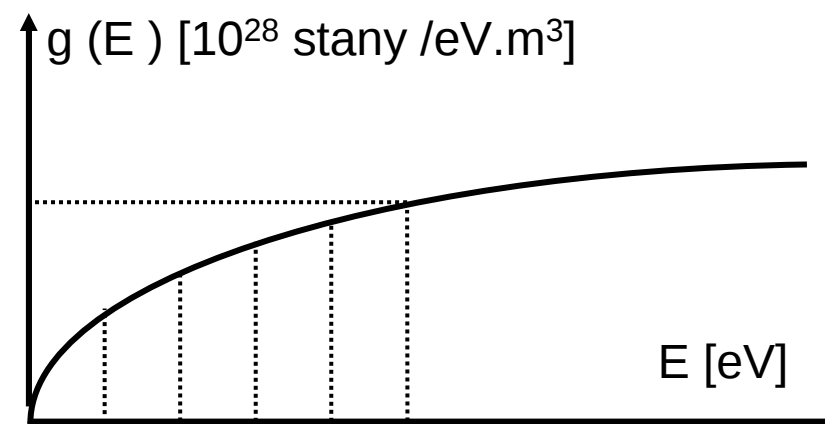
4	1.356
---	-------

5	1.516
---	-------

6	1.661
---	-------

7	1.794
---	-------

...



$$E = 7 \text{ eV} \quad g(E) = 1.794 \cdot 10^{28} \text{ stany/eV.m}^3$$

Liczba stanów w objętości V

$$g(E) \cdot V = 1.794 \cdot 10^{28} [\text{stany/eV.m}^3] \times 2 \cdot 10^{-9} [\text{m}^3] = 4 \cdot 10^{19} \text{ stanów/eV}$$

Liczba stanów-Cu

$$E = 7 \text{ eV}$$

$$g(E) = 1.794 \cdot 10^{28} \text{ stany/eV.m}^3$$

Liczba stanów w objętości V

$$g(E) \cdot V = 1.794 \cdot 10^{28} [\text{stany/eV.m}^3] \times 2 \cdot 10^{-9} [\text{m}^3] = 4 \cdot 10^{19} \text{ stanów/eV}$$

Liczba stanów w objętości V i w małym zakresie energii dE

$$g(E) \cdot V \cdot dE = 4 \cdot 10^{19} [\text{stanów/eV}] \times 0.003 [\text{eV}] = 1 \cdot 10^{17} \text{ stanów}$$

(W małym zakresie energii dE wokół E $dE \ll E$ $g(E)V \sim \text{stała}$)

CuEnergia poziomu dla $T=1000\text{ K}$, $f(E) = 0.9$

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)}$$

$$\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) = \frac{1}{f(E)} - 1 = \frac{1}{0.9} - 1 = 0.111 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) = \ln(0.111) = -2.198$$

$$E = E_F + (-2.198) \times k_B T = 7[\text{eV}] - \left[2.198 \times \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \times 1000}{1.6 \cdot 10^{-19}} \right] = 7 - 0.19 = 6.81 \text{ eV}$$

Gęstość stanów dla $E = 6.81 \text{ eV}$

$$g(E) = cE^{1/2} = 0.678 \cdot 10^{28} \times (6.81)^{1/2} = 1.769 \cdot 10^{28} \text{ stany/eV.m}^3$$

Liczba stanów obsadzonych dla $E = 6.81 \text{ eV}$

$$n = g(E)f(E) = 1.769 \cdot 10^{28} \times 0.9 = 1.6 \cdot 10^{28} \text{ stany/eV.m}^3$$

Liczba stanów obsadzonych dla energii $E = 7 \text{ eV}$

$$n = g(E)f(E) = 1.794 \cdot 10^{28} \times 0.5 = 1 \cdot 10^{28} \text{ stany/eV.m}^3$$

$$E_F (\text{Cu}) = 7 \text{ eV}; E = E_F \quad f(E) = 0.5$$

Ciepło właściwe elektronów przewodnictwa

$$C_e = \left(\frac{d\langle E \rangle}{dT} \right)_v = T \left(\frac{dS}{dT} \right)_v$$

Gaz kwantowy Fermiego-Diraca

$$T = 0K \quad f(E) = 1 \quad \text{gdy } E \leq E_F$$

$$f(E) = 0 \quad E > E_F$$

$$T \neq 0K \quad E_e = 0 \div E_F$$

Tylko elektron $E_e \sim E_F$ dostaje kT

Gaz klasyczny MB

$$T = 0K \quad E_e = 0$$

$T \neq 0K$ każdy elektron dostaje $k_B T$

Ciepło właściwe N elektronów swobodnych

$$C_e = (3/2) N k_B$$

$$C_e \text{ (doświadczny)} = 1\% (3/2) N k_B$$

Jeżeli N jest całkowitą liczbą elektronów, to tylko część rzędu T/T_F można wzбудzić termicznie w temperaturze. Każdy z tych NT/T_F elektronów ma energię termiczną rzędu kT wobec tego całkowita energia termiczna elektronów jest rzędu

$$E_e \sim (NT/T_F) k_B T$$

Wtedy elektronowe ciepło właściwe jest rzędu

$$C_e \sim (N/T_F) k_B T \sim T$$

Ciepło właściwe gazu elektronowego

$$C_e = \left. \frac{d\langle E \rangle}{dT} \right|_v = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T D(E_F)$$

$$\langle E \rangle = E_0 + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D(E_F)$$

$$\begin{aligned} D(E_F) &= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E_F^{1/2} = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{1/2} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{2m}{\hbar^2} k_F \\ &= \frac{3N}{2k_F^3} \frac{2m}{\hbar^2} k_F = \frac{3N}{2} \frac{2m}{\hbar^2 k_F^2} = \frac{3}{2} \frac{N}{E_F} = \frac{3}{2} \frac{N}{k_B T_F} \end{aligned}$$

$$C_e = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 N k_B^2}{E_F} T = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 N k_B}{T_F} T = \gamma T$$

Na 1 mol, dla swobodnych elektronów o masach m

$$\gamma = \frac{1}{3} \pi^2 D(E_F) k_B^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 N k_B^2}{E_F} = \frac{\pi^2 N_A k_B^2 m}{\hbar^2 (3\pi^2 N/V)^{2/3}} = \frac{\pi^2 N_A k_B^2 m}{\hbar^2 (3\pi^2 n_e)^{2/3}}$$